第 41 卷　第 1 期
2023 年 3 月
天 文 学 进 展
PROGRESS IN ASTRONOMY
Vol. 41,　No. 1
Mar., 2023

doi: 10.3969/j.issn.1000-8349.2023.01.07

原子钟频率稳定度评估方法综述

马岳鑫[1,2]，唐成盼[1,2]，胡小工[1]

(1. 中国科学院　上海天文台，上海　200030；2. 中国科学院大学，北京　100049)

摘要： 原子钟通过稳定的频标来测量时间，但频标输出信号会受到不同来源噪声的影响，因此原子钟间相位偏差可以看作服从幂律 $\sum h_\alpha f^\alpha$ 的连续随机过程。该随机过程并非平稳的，一般是通过高阶的差分使得序列平稳化，常用的时域频率稳定度评估方法便是采用此种思路。幂律噪声实际是对白噪声过程进行微分和积分得来，不同幂律的噪声对应不同的随机微分方程，实际上幂律噪声的仿真也是通过白噪声基于此实现的。首先介绍了不同幂律噪声的鉴定方法，并结合文献给出常见幂律噪声对应的微分方程；然后介绍了不同频率稳定度评估方法之间的关系和其相应的传递函数，并简单总结了其置信区间的计算方法。该文的工作有助于构建原子钟随机模型和频率稳定度评估方法。

关　键　词： 原子钟；幂律谱噪声；等效自由度；置信区间；无偏估计

中图分类号： P228　　**文献标识码：** A

1　引　言

原子钟通过稳定的频标来测量时间，最终输出的钟面时不可避免地受到电子元器件运行噪声影响，不同层级的白噪声随着时间积累体现在钟面时的功率谱密度上呈现幂律 $\sum h_\alpha f^\alpha$ 特性，包含不同的周期特征[1]。自相关函数 (autocorrelation function, ACF) 和功率谱密度 (power spectral density, PSD) 包含一个连续随机过程的全部信息[2]，但很难从中提取有用的定量信息。阿伦方差 (Allan variance)[3] 与哈达玛方差 (Hadamard variance)[4] 可以定量地描述原子钟频率稳定度，Hutsell[5] 给出两者与卡尔曼滤波模型过程噪声系数的数学关系。阿伦方差可以识别不同幂律的频率白噪声、频率闪变噪声和频率游走噪声 (对于频率数据，其幂律分别为 0, −1, −2)，并借此计算噪声水平系数[6]。但对频率游走闪变噪声 (幂律为 −3) 和频率奔跑噪声 (幂律为 −4) 不收敛[7]，不幸的是铷原子钟受到这两类噪声的影响[8]。与阿伦方差不同，基于三次差分的哈达玛方差对这两类低频噪声收敛[9]。

收稿日期： 2022-03-28；　**修回日期：** 2022-04-19

资助项目： 国家自然科学基金 (41931076, 41904042, 41804030, 41874039 和 42004028)

通讯作者： 马岳鑫，mayx58@mail.sysu.edu.cn

当平滑时间较长时，哈达玛方差估值置信度会降低，有学者提出一种总方差的估值方法，该方法通过特定的映射来延拓数据以提高置信度[10]。参考重叠阿伦方差[11]类似地可以定义重叠哈达玛方差[12]，由于重叠哈达玛方差最大限度地利用了样本的所有可能的三次差，因而最大限度地利用了当前样本，所以其估值的置信度可以得到提升。与哈达玛方差的估值不同，重叠哈达玛方差采用了彼此存在相关性的样本进行估值，也因此其估值不服从整数自由度的卡方分布[13]，而是经验性地近似服从非整数等效自由度 ν 的卡方分布[14]。对于方差的估值，当显著性水平相同时，等效自由度越大估值置信区间越小，估值越准确。随着北斗三号全球系统的建立，对高性能星载原子钟钟差的计算、预报和评估工作得以开展[15−24]，而开展此类工作的前提便是构建这些原子钟的基本数学模型。

本文第 2 章首先介绍了最广为接受的原子钟模型，该模型可以说是最简单有效的原子钟模型，其同时包含了确定过程和随机过程部分，其随机过程部分即为非平稳的幂律谱模型。对于原子钟频率而言，一般认为其受到 5 种整数幂律噪声 $(2 \sim -2)$ 叠加的影响[6]，后续对铷原子钟的研究增加了两种幂律噪声 $(-3, -4)$[8]，本文第 2 章还介绍了不同幂律噪声的鉴别方法。幂律过程可由白噪声过程通过微分和积分得到，举个例子，随机游走过程为幂律为 -2 的随机过程，由于其为独立增量过程，对其微分便是白噪声过程。本文第 3 章主要介绍了幂律噪声的仿真以及其对应的随机微分方程，至此主要为时域分析。原子钟频率稳定度的评估便是对幂律噪声能量的评估，阿伦方差与哈达玛方差在本质上是一致的，即在时域上通过差分使得序列平稳化。本文以概述的角度在第 4 章统一介绍了两种频率稳定度评估方法及其关系，同时整理了它们在频域的传递函数。对于一个高斯过程 (白噪声过程) 而言，最重要的统计量便是期望和方差函数，其期望常被认为是零，其方差主要反映了噪声能量的强弱。众所周知，一般对方差估计的统计量服从卡方分布，那么对于阿伦或者哈达玛方差而言，其置信区间同样通过卡方分布确定。第 5 章主要介绍等效自由度和频率稳定度评估方法置信区间的确定。

2 原子钟模型和幂律噪声的鉴别

原子钟借助稳定的频标测量时间，通过比对原子钟间的相位差，根据频标的基准频率得到物理意义上的时间差。但原子钟频标很容易受到不同来源的噪声影响，温度和辐射同时会影响原子钟频标的稳定度[25]。一种被广为接受且相对简单的原子钟频标电子振荡器模型为：

$$V(t) = (V_0 + \varepsilon(t)) \sin[2\pi\nu_0 + \phi(t)] \quad , \tag{1}$$

其中，V_0 和 ν_0 分别为振幅和频率，π 是圆周率，t 是时间；$\varepsilon(t)$ 是施加在振幅上的噪声，对于精确的原子钟振荡器而言，该噪声可以忽略；$\phi(t)$ 是一个非平稳的连续幂律随机过程且满足 $|\dot{\phi}(t)| \ll 2\pi\nu_0$[26]。由于 $|\dot{\phi}(t)| \ll 2\pi\nu_0$，即该噪声对频率的影响远低于原子钟基准频率，更容易反映在经过一定时间积累后的相位和频率比对序列上。

一般一个原子钟的频标被认为是一个十分稳定的频率源，即频标的输出频率保持在基准

频率 ν_0 附近很小的一个区间内。原子钟对时间的测量通过相位比对实现，当相位由 $t_0 \cdot 2\pi\nu_0$ 变化到 $t_0 \cdot 2\pi\nu_0 + \Delta t \cdot 2\pi\nu_0 = (t_0 + \Delta t) \cdot 2\pi\nu_0$ 时，时间便增加了 Δt 秒。但一个频标的实际频率必然与其标称频率之间存在一个系统差，初始相位也往往不可能是零，同时还可能伴随着频率老化和频率漂移现象，因此原子钟测量的时间偏差会受到初始相位偏差 x_0、初始频率偏差 y_0 和线性频率漂移 D 等确定部分的影响。同时原子钟的相位还受到随机部分 $\phi(t)$ 的影响。那么，瞬时时间 (相位) 偏差 $x(t)$ 被定义为：

$$x(t) = \frac{D_{\text{system}} + \phi(t)}{2\pi\nu_0} = x_0 + y_0 t + \frac{1}{2}Dt^2 + \varphi_x(t) \quad , \tag{2}$$

其中，D_{system} 代表由初始相位偏差 x_0、初始频率偏差 y_0 和线性频率漂移 D 等确定过程导致的相位偏差；$\phi(t)$ 是由随机过程导致的相位偏差，其功率谱是 $S_x(f) \cdot 2\pi\nu_0$，其中 $S_x(f)$ 表示功率谱密度。

自然环境中原子钟振荡器的输出频率不可能是恒定的：(1) 频标输出频率本身存在白噪声；(2) 受环境因素和频标老化影响，频标输出频率会出现包含确定过程的增量过程，该增量过程也会受到白噪声污染并使得频标输出频率包含频率游走噪声。因此，最初的原子钟随机模型仅为幂律 2 到 -2 的噪声叠加，其中幂律为 2 的噪声是自然存在于相位比对时的白噪声，幂律为 0 的噪声为频标输出频率本身存在白噪声，幂律为 -2 的噪声为上述的频率游走噪声，幂律为 1 和 -1 的噪声被称为闪烁噪声，其由电子元器件以及电子环路非理想因素导致[27]。而原子钟间的相位偏差 $x(t)$ 实际上是原子钟频率偏差的积分过程，因此有：

$$S_y(f) = (2\pi f)^2 \cdot S_x(f) = \sum_{\alpha=-4}^{2} h_\alpha f^\alpha \quad , \tag{3}$$

其中，$S_x(f)$ 是 $\varphi_x(t)$ 的功率谱密度 (PSD)，$S_y(f)$ 是 $\varphi_y(t)$ 的功率谱密度，且有 $\varphi_y(t) = \dot{\varphi}_x(t)$；对于频率 f 有 $0 \leqslant f \leqslant f_h$，其中 f_h 为上限截止频率；α 为幂律噪声的幂指数，h_α 是幂指数为 α 的噪声的强度因子。$\alpha = 2, 1, 0, \cdots, -4$ 分别对应噪声名为相位白噪声 (white phase modulation noise, WPM)、相位闪烁噪声 (flicker phase modulation noise, FPM)、频率白噪声 (white frequency modulation noise, WFM)、频率闪烁噪声 (flicker frequency modulation noise, FFM)、频率随机游走噪声(random walk frequency modulation noise, RWFM)、频率闪烁游走噪声 (flicker walk frequency modulation noise, FWFM) 和频率随机奔跑噪声 (random run frequency modulation noise, RRFM)。前五种噪声便是上文提到的最初原子钟随机模型里所建模的五种噪声，后两种噪声是因为后续对铷原子钟研究而增加的奔跑闪烁噪声和奔跑噪声。其中奔跑噪声可以理解为“随机游走的游走噪声”，即频标输出频率的增量过程也受到了白噪声的污染。式 (3) 便是有名的原子钟噪声幂律模型[4]。

对于如何确定不同幂律噪声的类型。最为直接的想法就是估计噪声功率谱，从频域上直接分析。但此方法并不容易实现，原因主要为两个：(1) 实际的噪声往往是多幂律噪声的叠加；(2) 功率谱的准确估计本身就是难题。一般采用时域分析的方法辨别噪声，这里介绍一种基于时域的自相关函数的噪声鉴别方法，Lag 1 偏差函数法[28]。

Lag k 自相关函数 (ACF) 的定义为：

$$\rho_k = \frac{E[(z_t - \mu)(z_{t+k} - \mu)]}{\sigma_z^2} \quad , \tag{4}$$

其中，z_t 是任一时间序列，可以是瞬时相位偏差 $x(t)$ 或瞬时频率偏差 $y(t) = \dot{x}(t)$ 的离散采样序列；μ 是其均值，σ_z^2 是其方差，$E[\cdot]$ 代表数学期望。其为交错 k 位后的序列自相关函数值。当 $k = 1$ 时，便是 Lag 1 自相关函数，定义统计量 r_k 作为其估计值：

$$r_k = \frac{\dfrac{1}{N-k}\displaystyle\sum_{t=1}^{N-k}(z_t - \bar{z})(z_{t+k} - \bar{z})}{\dfrac{1}{N}\displaystyle\sum_{t=1}^{N}(z_t - \bar{z})^2} \quad , \tag{5}$$

其中，$\bar{z}$ 是该时间序列的均值，N 是该时间序列的长度。

幂律为 2 的噪声实际上是白噪声过程经过一次微分得到的随机过程，对于该过程均匀采样的时间序列而言，相邻的两个随机变量间存在线性相关性，其 Lag 1 自相关函数值为 $-1/2$，该值可由维纳-辛钦定理推导出。而幂律为 1 的噪声同样是白噪声过程经过更复杂的微分 (分数微分) 得到，其 Lag 1 自相关函数值为 $-1/3$。而幂律为 0 的噪声实际就是白噪声，对该过程均匀采样的时间序列相邻的两个随机变量线性无关，故其 Lag 1 自相关函数值为零。图 1 展示了仿真的幂律为 2, 1 和 0 的随机过程的 20 组样本函数 (噪声的强度因子为 1，时间采样间隔为 1 s) 的自相关函数图，仿真的 Lag 1 自相关函数值与理论分析一致。

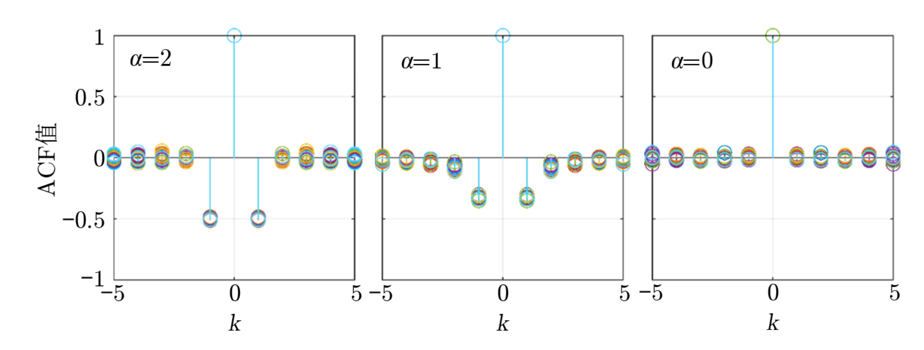


图 1　幂律为 2, 1 和 0 的随机过程的 20 组样本函数的自相关函数图

若 z_t 是频率偏差序列，ρ_1 的估值 r_1 接近 $-1/2$ 便是 WPM、接近 $-1/3$ 便是 FPM、接近 0 便是 WFM，这三种噪声对于频率偏差序列而言都是平稳的，可以直接通过 Lag 1 自相关函数确定其噪声类型。对于非平稳的时间序列，需要首先通过差分使其平稳化进而利用 Lag 1 自相关函数确定其噪声类型。令 $\delta = r_1/(1 + r_1)$，一般的若 $\delta < 0.25$，则可以认为时间序列 z_t 平稳，并有 Lag 1 相关函数 $\rho_1 = \delta/(1 - \delta)$。这样，对于一个非平稳的时间序列 z_t：首先对其进行多次向后一阶差分并计算 δ 直到 $\delta < 0.25$，此时时间序列平稳。注意到每差分一次得到新的序列，对于新序列来讲原本噪声的幂律 +2，此时记录差分次数 d 用以还

原原本噪声幂律系数。经过差分后的序列实际是把幂律为 $-1 \sim -4$ 的噪声转化为幂律为 2 $\sim$ 0 的噪声，此时利用 Lag 1 ACF 函数确定具体的噪声类型并结合差分次数 d 得到原本噪声的幂律系数。令 $p = -\mathrm{round}(2\delta) - 2d$ (其中 round(*) 为取 * 最近的整数)，可借助 p 的值确定噪声幂指数 α。对于频率数据而言 $\alpha = p$，对于相位数据而言 $\alpha = p + 2$[28]。

常用的幂律噪声鉴定方法还有 B1 偏差函数法[29]等。对于 Lag 1 偏差函数法，文献 [30] 做了进一步拓展，并给出了基于重叠哈达玛方差的 Lag 1 自相关函数幂律噪声确定算法。

3 幂律噪声的仿真及其随机微分方程

白噪声过程的功率谱密度 $S_x(\omega)$ 在整个频谱上为常数，对白噪声过程 $\omega(t)$ 进行积分和微分就能生成频谱为幂律的有色噪声过程。幂律为 2, 0, -2 和 -4 的有色噪声可通过白噪声过程直接微分或者积分得到：

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t} = \varphi_2 \\ \varphi_0 = \omega \\ \dfrac{\mathrm{d}\varphi_{-2}}{\mathrm{d}t} = \omega \\ \dfrac{\mathrm{d}^2\varphi_{-4}}{\mathrm{d}t^2} = \omega \end{cases} , \tag{6}$$

其中，φ_i 是幂律为 i 的有色噪声，ω 为白噪声过程。式 (6) 给出幂律为 2, 0, -2 和 -4 等有色噪声的随机微分方程，借助该方程可以由白噪声过程仿真出上述有色噪声。实际上最为广泛的基于卡尔曼滤波实现的时间尺度的状态方程便建立在此基础上。式 (7) 为标准三变量卡尔曼滤波时间尺度用以描述系统状态的微分方程组：

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}x_1}{\mathrm{d}t} = x_2 + \omega_1 \\ \dfrac{\mathrm{d}x_2}{\mathrm{d}t} = x_3 + \omega_2 \\ \dfrac{\mathrm{d}x_3}{\mathrm{d}t} = \omega_3 \end{cases} , \tag{7}$$

其中，x_1, x_2 和 x_3 分别为相位状态量、频率状态量和频率漂移状态量；ω_1, ω_2 和 ω_3 为三个独立的白噪声过程，其分别生成了 FFM, RWFM 和 RRFM[31]。

然而对于幂律为 1, -1 和 -3 的有色噪声，仿真一直是个难题，主要的仿真方法有三种：(1) 借助 ARMA 模型仿真；(2) 分数微积分仿真；(3) 基于小波分析仿真。三种仿真方法都需要采用不同的有限过程逼近幂律为 1, -1 和 -3 的有色噪声[32]。文献 [27] 对这类噪声产生的机理进行了深入探究，并找到了产生此类噪声背后的物理原因。本文仅结合文献介绍幂律为 -1 的有色噪声定义，以及采用四个马尔可夫过程逼近的噪声生成方法。考虑到幂律为 -2 的噪声就是布朗运动，借助修正的分数布朗运动：

$$B_f(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha/2)}\left[\int_{-\infty}^{0}\left(|t-\tau|^{\alpha/2-1} - |\tau|^{\alpha/2-1}\right)\omega(\tau)\mathrm{d}\tau + \int_0^t |t-\tau|^{\alpha/2-1}\omega(\tau)\mathrm{d}\tau\right] , \tag{8}$$

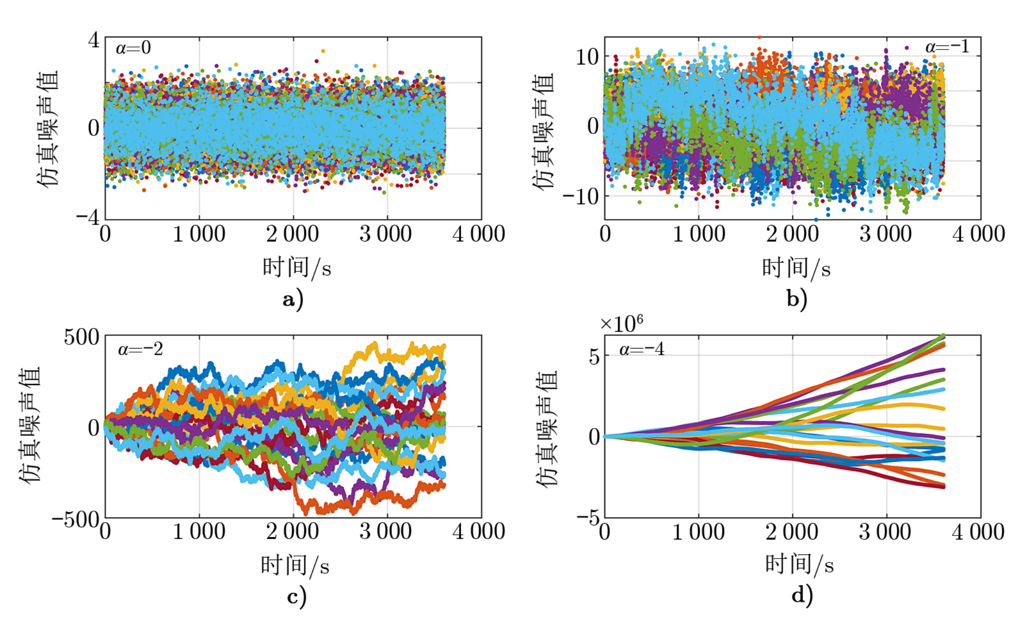
定义任意 α 的幂律噪声[33]。实际上幂律为 -1 的噪声在数学上便是采用分数微分定义的，即取公式 (8) 中的 $\alpha=1$。然而仅借助公式 (8) 不可能实现分数布朗运动仿真，本文介绍一种基于多个独立马尔科夫过程叠加的幂律为 -1 的噪声仿真方法。

一个马尔可夫频率过程可由高斯过程借助微分方程化，表示为：

$$\frac{\mathrm{d}\varphi_m}{\mathrm{d}t}+R\varphi_m=\omega \quad , \tag{9}$$

其中，φ_m 是马尔可夫频率过程，R 是常数，ω 是白噪声过程。选择不同的常数 R 生成四个独立的马氏过程并叠加，便可近似地生成一个幂律为 -1 的有色噪声过程[34]。文献 [34] 同时完成了包含 FFM 噪声的卡尔曼时间尺度的构造，其对 FFM 噪声的处理办法便是采用四个独立的马氏过程近似，R 作为状态参数被设计在滤波器中用以拟合并逼近原子钟里实际存在的 FFM。

图 2 展示了白噪声过程 (幂律为 0)、分数布朗运动 (幂律为 -1)、布朗运动 (幂律为 -2) 和随机奔跑运动 (幂律为 -4) 4 种随机过程的 20 组仿真样本时间序列图。借助该图可以直观地了解不同幂律噪声在时域里的特征。



注：a) 白噪声过程；b) 分数布朗运动；c) 布朗运动；d) 随机奔跑运动。其中仿真的噪声强度因子为 1，样本函数时间采样间隔为 1 s。

图 2　连续随机过程的 20 组样本函数时间序列图

原子钟系统模型和随机模型已梳理清楚，幂律噪声的鉴别与仿真已完整介绍。那么此后借助常用的频率稳定度评估方法可以进一步从多种混合的幂律噪声中确定相应噪声的幂指数和能量系数。

4 原子钟频率稳定度评估方法的统一形式和传递函数

常用的原子钟频率稳定度评估方法有阿伦方差和哈达玛方差，重叠阿伦方差和重叠哈达玛方差是为解决数据量少时两种方差置信度低的问题，改进阿伦方差和改进哈达玛方差是因为两种方差无法区分幂律为 2 和 1 的噪声，而阿伦总方差和哈达玛总方差是为解决平滑时间较长时置信度低的问题所提出[35]。这些频率稳定度评估方法都是基于阿伦方差和哈达玛方差，本章主要讨论两种方差的定义、关系及传递函数，并结合文献介绍一种统一的形式用来描述两种方差。

阿伦方差为分析频率稳定度最早被提出，其本质仍是一种方差，由于振荡器频率序列受到随机游走噪声影响并非平稳序列，因此需要通过差分使得序列平稳化。频率稳定度实际评估的是一个振荡器输出频率的随机误差，与方差分析概念有些类似但内涵完全不同，这是由基本的随机模型不同所决定的。频率稳定度评估的随机模型是一种不平稳的随机过程，是多种不平稳过程的叠加，我们需要对这个多种噪声叠加的不平稳过程进行整体的误差分析。而测量平差中的误差分析其实是对平稳的白噪声的误差分析。当然两者也存在一定的联系，当我们对 WFM, RWFM 和 RRFM 进行建模，引入状态空间，此时在状态空间中的误差分析便转化为了测量平差中的误差分析。这种转化实际上是把“基于平滑时间变化的多噪声叠加随机误差分析”转化为了“状态空间中状态量的误差分析”，但事实上，对某一种幂律噪声的解析式的独立分析本质上是很难实现的。对原始数据进行差分后，数据的物理意义已经改变，噪声的功率谱也发生了变化，但频率稳定度所分析的目标是一个频标输出的随机误差，是对幂律谱随机模型的整体分析，差分后噪声功率谱确实发生了一些变化，由 $S(f)$ 变成了 $(2\pi f)^2 \cdot S(f)$，但这并不影响对频标输出的随机误差的整体分析。阿伦方差便是为分析频率稳定度提出的，对于频率数据而言，由于只有作为主要噪声源之一的 WFM 的方差是不随时间变化的，因此阿伦方差被设计为其期望与 WFM 的标准方差的一致。阿伦方差 $\sigma_y^2(\tau)$ 的定义是：

$$\sigma_y^2(\tau) \equiv \left\langle \frac{(\bar{y}_{k+1} - \bar{y}_k)^2}{2} \right\rangle \ , \quad \bar{y}_k = \frac{1}{\tau} \int_{t_k}^{t_{k+\tau}} y(t)\mathrm{d}t \ , \tag{10}$$

其中，$y(t)$ 是瞬时频率偏差，τ 是平滑时间。由于原文是定义在连续过程上的，需要在 $t = [0, +\infty]$ 上积分，故 $\langle\rangle$ 表示无穷时间上的平均，可以理解为数学期望[36]。若振荡器频率受到随机奔跑噪声影响，仅通过一次差分无法使得序列平稳化，很容易想到进行高阶差分使序列平稳化。实际上哈达玛方差是基于哈达玛变换构造的[37]，文献 [4] 将其改造使其更加适合时域分析。实际上根据文献 [4] 的定义，对频率数据进行二阶及二阶以上 (相位数据三阶及三阶以上) 差分构造的方差均称为哈达玛方差，不过对于原子钟频率稳定度分析来讲，对频率数据二阶以上的差分并无必要，我们通常讲的哈达玛方差便是对频率数据进行二次差分的方差。哈达玛方差定义为：

$$\sigma_H^2(2,\tau) \equiv \left\langle \frac{(\bar{y}_{k+2} - 2\bar{y}_{k+1} + \bar{y}_k)^2}{6} \right\rangle \ , \quad \bar{y}_k = \frac{1}{\tau} \int_{t_k}^{t_{k+\tau}} y(t)\mathrm{d}t \ , \tag{11}$$

公式 (11) 可以拓展为 N 次差分哈达玛方差：

$$\sigma_H^2(N,\tau) \equiv \left\langle \frac{(\bar{y}_{k+N} - N\cdot\bar{y}_{k+N-1} + N\cdot\bar{y}_{k+N-2}\cdots \pm \bar{y}_k)^2}{(N-1)\cdot N^2+2} \right\rangle \ , \quad \bar{y}_k = \frac{1}{\tau}\int_{t_k}^{t_{k+\tau}} y(t)\mathrm{d}t \ , \tag{12}$$

当 $N=1$ 时，为阿伦方差；$N\geqslant 2$ 时，是哈达玛方差。需要注意的是，式 (12) 的定义与文献 [4] 最初的定义不太一致，首先差分方式略有不同，其次原本的定义并未除以分母的部分。考虑到差分运算会放大噪声，且为了保证该方差的期望与 WFM 标准方差的期望一致，式 (12) 分母是必要的。式 (11) 所示的现在最常用的哈达玛方差是经过了 Riley 和 Howe 改进的，他们同时给出了上述二阶差分哈达玛方差的传递函数[35]。另外，式 (12) 的拓展是作者根据文献归纳推导出的，但遗憾的是本文未能给出 $N>2$ 时的传递函数的统一形式。

通过阿伦方差和哈达玛方差的定义，不难看出两种方差的计算都需要经过差分和平滑两种算子的处理，而后续对两种方差的改进也无非是多增加平滑。众所周知，平滑算子可以看作一种低通滤波器，而差分算子可以看作一种高通滤波器，两者组合可以构成一个带通滤波器，并且随着平滑时长 τ 的增大，该带通滤波器的最大共振频率随之降低。而方差本身便是对噪声能量强弱的一种评估，因此通过平滑时长 τ 的增加，不同幂律噪声将逐次变为主导噪声类型，进一步可以顺次分析 WFM, FFM, RWFM, FWFM 和 RRFM 等噪声的能量强弱。式 (13) 和 (14) 分别给出了阿伦方差和哈达玛方差的传递函数[35]，其中 $H(f)$ 和 $H_{\mathrm{Ha}}(f)$ 分别是阿伦方差和哈达玛方差的传递函数，τ 是平滑时长。

$$|H(f)|^2 = 2\left[\frac{\sin^4(\pi\tau f)}{(\pi\tau f)^2}\right] \ , \tag{13}$$

$$|H_{\mathrm{Ha}}(f)|^2 = 2^4\left[\frac{\sin^6(\pi\tau f)}{(\pi\tau f)^2}\right] \ . \tag{14}$$

5　方差的分布和等效自由度的确定

阿伦方差和哈达玛方差是频率稳定度评估的主要工具，而这两种工具的本质仍是一种对方差的估计。方差的估值一般是服从卡方分布，那么对方差估值的误差分析就应当基于卡方分布而非正态分布。本章主要介绍基于卡方分布的方差估值误差棒的计算。

对于一个平稳过程方差 σ^2 的无偏估计 V ($\sigma^2 = V_{\mathrm{E}}$)，其等效自由度 (equivalent degrees of freedom, EDF) 为：

$$\nu = V_{\mathrm{EDF}} = \frac{2(V_{\mathrm{E}})^2}{V_{\mathrm{var}}} \ . \tag{15}$$

随机变量 $(\nu/\sigma^2)V$ 近似地服从自由度为 ν 的卡方分布 χ^2_ν，那么给定的显著性水平 ρ 可以确定方差估值 σ^2 的置信区间为 $\nu V/x_2 \leqslant \sigma^2 \leqslant \nu V/x_1$ ($x_1 < x_2$)。文献 [14] 给出了 V_{E} 和 V_{var} 的计算方法：

$$V_{\mathrm{E}} = \sigma^2 = s_z(0) \ , \tag{16}$$

$$V_{\mathrm{var}} = \frac{2}{M^2}\sum_{n_1,n_2=1}^{M} s_z^2[(n_2-n_1)\tau] \ , \tag{17}$$

其中，τ 为平滑时长。自相关函数 $s_z(t)$ 由广义自相关函数 (generalized autocovariance, GACV) $s_\omega(t)$ 表示：

$$s_z(t) = (\Delta_\tau \Delta_{-\tau})^d \Delta_\tau \Delta_{-\tau} s_\omega(t) \quad , \tag{18}$$

其中，Δ 为一阶的向后差分算子，$d = 2$ 时为阿伦方差，$d = 3$ 时为哈达玛方差。对于不同幂律的噪声，$s_\omega(t)$ 不同，表 1 给出了幂律为 2, 1, 0, −1, −2, −3, −4 的广义自相关函数。

表 1 不同能量谱噪声的 $s_\omega(t, \alpha)$

α	2	1	0	−1	−2	−3	−4
$s_\omega(t,\alpha)$	$-\lvert t\rvert$	$t^2\ln\lvert t\rvert$	$\lvert t\rvert^3$	$-t^4\ln\lvert t\rvert$	$-\lvert t\rvert^5$	$t^6\ln\lvert t\rvert$	$\lvert t\rvert^7$

按照本文第 2 章介绍的方法，可以确定平滑时长 τ 时的主要幂律噪声类型，参考表 1 并借助式 (16) 和式 (17) 可以计算出方差估计的等效自由度 ν，那么该方差的分布函数为：

$$\chi_\nu^2 = \frac{\nu \cdot s^2}{\sigma^2} \quad , \tag{19}$$

其中，s^2 是采样方差，σ^2 为真实方差，ν 为等效自由度。给定显著性水平 ρ，双边置信区间为：

$$s^2 \cdot \frac{\nu}{\chi^2(\rho,\nu)} < \sigma^2 < s^2 \cdot \frac{\nu}{\chi^2(1-\rho,\nu)} \quad . \tag{20}$$

该方法对重叠阿伦方差和重叠哈达玛方差同样适用[14]。

基于本章介绍的算法，可以计算阿伦方差和哈达玛方差估值的误差棒。

6 结 论

本文对原子钟频率稳定度分析方法的数学原理进行了简单的介绍。具体包括：原子钟模型的建立及幂律谱噪声的识别，幂律噪声的仿真及其随机微分方程，常用频率稳定度评估方法的统一描述形式及其传递函数，常用频率稳定度评估方法的置信区间计算。本文重点介绍了频率稳定度评估算法的来历和其背后的数学原理。通过本文的综述，可以对原子钟随机模型和频率稳定度评估算法的构建得到系统且相对深入的认识：(1) 幂律噪声是什么；(2) 最初的原子钟随机模型为何仅涉及五种幂律噪声；(3) 幂律噪声如何鉴别；(4) 幂律噪声如何通过白噪声生成；(5) 不同频率稳定度评估方法的内在联系；(6) 阿伦方差和哈达玛方差估值的置信区间如何计算。值得注意的是，本文还同时给出一种包含阿伦方差、哈达玛方差和更高阶差分方差统一形式。基于本文介绍的相关理论，对于一个原子钟频率稳定度的完整评估应当包括两部分：(1) 确定一个原子钟振荡器输出频率主要受到何种随机噪声的影响；(2) 确定影响原子钟频率稳定度的几种主要噪声类型的能量强弱。基于本文介绍的相关理论，对于相位数据或者频率数据，完整的评估过程应当为：(1) 计算在不同平滑时间下的阿伦方差、哈达玛方差和改进阿伦方差，并计算方差的置信区间；(2) 计算 Lag 1 自相关函

数或者 B1 偏差函数，确定不同平滑时长下的主要噪声类型；(3) 基于此完成主要噪声类型的分析和噪声能量强度分析。

参考文献：

[1] Lewandowski W, Arias E F. Metrologia, 2011, 48(4): 219
[2] Freeman J, Medhi J. Journal of the Operational Research Society, 1996, 47(6): 836
[3] Allan D W, Barnes J A. NIST, 1981, 4: 25
[4] Baugh R A. 25th Annual Symposium on Frequency Control. Washington: IEEE, 1971: 222
[5] Hutsell S T. Proceedings of the 27th Annual Precise Time and Time Interval Systems and Applications Meeting. 1995: 291
[6] Riley W J. International Frequency Control Symposium. Tampa: IEEE, 2003: 4
[7] 郭海荣. 博士论文. 郑州: 信息工程大学, 2006
[8] Hutsell S T, Reid W G, Crum L J D, et al. Proceedings of the 28th Annual Precise Time and Time Interval Systems and Applications Meeting. Washington: IEEE, 1996: 201
[9] Greenhall C A. Proceedings of International Frequency Control Symposium. Washington: IEEE, 1997: 358
[10] Howe D A, Greenhall C A. Proceedings of the 29th Annual Precise Time and Time Interval Systems and Applications Meeting. 1997: 39
[11] Percival D B, Guttorp P. Wavelet analysis and its applications. Academic Press, 1994: 325
[12] Howe D A, Beard R L, Greenhall C A, et al. Enhancements to GPS operations and clock evaluations using a" total" hadamard deviation[J]. ieee transactions on ultrasonics, ferroelectrics, and frequency control, 2005, 52(8): 1253
[13] Howe D A, Allan D U, Barnes J A. Properties of signal sources and measurement methods[C]. Thirty Fifth Annual Frequency Control Symposium. IEEE, 1981: 669
[14] Greenhall C A, Riley W J. Uncertainty of stability variances based on finite differences. Amherst: University of Massachusetts, 2004: 1
[15] Chen J P, Hu X G, Tang C P, et al. Science China Physics, Mechanics & Astronomy, 2020, 63(6): 9511
[16] Pan J, Hu X, Zhou S, et al. Advances in Space Research, 2018, 61(1): 145
[17] Tang C, Hu X, Zhou S, et al. Advances in Space Research, 2016, 58(7): 1390
[18] Tang C, Hu X, Zhou S, et al. Journal of Geodesy, 2018, 92: 1155
[19] Yang Y, Yang Y, Hu X, et al. GPS solutions, 2021, 25: 1
[20] Ma Y, Tang C, Hu X, et al. IEEE Transactions on Instrumentation and Measurement, 2022, 71: 1
[21] Yang Y, Yang Y, Hu X, et al. The Journal of Navigation, 2020, 73(1): 115
[22] Liqian Z, Xiaogong H U, Chengpan T, et al. Chinese Journal of Aeronautics, 2022, 35(4): 332
[23] Zhao L, Hu X, Zhou S, et al. China Satellite Navigation Conference (CSNC) 2019 Proceedings: Volume II. Singapore: Springer, 2019: 71
[24] Zhao L, Hu X, Tang C, et al. Advances in Space Research, 2020, 66(3): 702
[25] Calero D, Fernandez E. 2015 International Association of Institutes of Navigation World Congress (IAIN). UK: IEEE, 2015: 1
[26] Rutman J, Walls F L. Proceedings of the IEEE, 1991, 79(7): 952
[27] Hooge F N, Kleinpenning T G M, Vandamme L K J. Reports on progress in Physics, 1981, 44(5): 479
[28] Riley W J, Greenhall C A. 2004 18th European Frequency and Time Forum (EFTF 2004). UK: IEEE, 2004: 576
[29] Barnes J A. Tables of bias functions. US: National Bureau of Standards, 1969: 1
[30] Ai Q, Yuan Y, Xu T, et al. Measurement science and technology, 2020, 31(6): 5003
[31] Greenhall C A. IEEE, 2012, 59(3): 491

[32] Kasdin N J. Proceedings of the IEEE, 1995, 83(5): 802
[33] Barnes J A, Allan D W. Proceedings of the IEEE, 1966, 54(2): 176
[34] Davis J A, Greenhall C A, Stacey P W. Metrologia, 2005, 42(1): 1
[35] Riley W J, Howe D A. Handbook of frequency stability analysis. US: US Department of Commers, 2008: 64
[36] Barnes J A, Chi A R, Cutler L S, et al. IEEE, 1971, 59: 105
[37] Pratt W K, Kane J, Andrews H C. Proceedings of the IEEE, 1969, 57(1): 58

A Compilation of the Theoretical Fundamentals of Atomic Clock Frequency Stability Evaluation Methods

MA Yue-xin[1,2], TANG Cheng-pan[1,2], HU Xiao-gong[1]

(1. Shanghai Astronomical Observatory, Chinese Academy of Science, Shanghai 200030, China; 2. University of Chinese Academy of Sciences, Beijing 100049, China)

Abstract: The atomic clocks measure time by the stable frequency standard, and the output signal of the oscillators is easily affected by noise from different sources which makes the phase deviation between two atomic clocks obeying a continuous power-law random process. Such stochastic process is not stationary and a typical approach by utilizing a high-order backward differencing operator can make the process become stationary, and the commonly used method for assessing the frequency stability in the time domain is based on this idea. This paper focuses on the mathematical fundamentals behind the method for assessing the frequency stability of atomic clocks. The power-law noise is actually derived from the calculus of white noise processes and the different power-law noises correspond to the different stochastic differential equations. In fact, the simulation of the power-law noise is also achieved by some differentiations and integrations operating on the white noise process. This paper first introduces the identification method of different power-law noises and gives the differential equations corresponding to the power-law noises in conjunction with some available literatures. Then, the relationships between the different frequency stability assessment methods and their corresponding transfer functions are presented, and the calculation method of the confidence intervals is briefly summarized. This paper provides some insight into the construction of the stochastic model for atomic clocks and methods for assessing frequency stability in a relatively systematic basis.

Key words: atomic clocks; power-law spectral noise; equivalent degrees of freedom; confidence intervals; unbiased estimates